

# Cadernos Espinosanos

## número especial sobre Leibniz



ESTUDOS SOBRE O SÉCULO XVII

n. 34    jan-jun    2016    ISSN 1413-6651



## LEIBNIZ E O PARADIGMA DA PERSPECTIVA

João F. N. Cortese

Doutorando, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil e  
Université Paris 7, Paris, França

joao.cortese@usp.br

**RESUMO:** No século XVII, vemos a emergência de uma nova abordagem geométrica às seções cônicas. Desenvolvida inicialmente por Girard Desargues e por Blaise Pascal, tal geometria é herdeira do método de representação pela perspectiva linear a aponta na direção da geometria projetiva do século XIX. Estudos recentes de J. Echeverría e de V. Debuiche iniciaram a discussão da recepção de tais trabalhos por Leibniz, assim como a relação deles com os trabalhos do próprio Leibniz em perspectiva (em grande parte ainda inéditos) e com a *Geometria situs*. Este artigo percorre algumas questões associadas a estes domínios, assim como a importância do paradigma da perspectiva para a filosofia de Leibniz.

**PALAVRAS-CHAVE:** Leibniz, Pascal, Desargues, perspectiva, geometria projetiva, infinito

*Por el ápice abierto el cono inverso  
deja caer la cautelosa arena  
oro gradual que se desprende y llena  
el cóncavo cristal de su universo*

J. L. Borges, *El reloj de arena*

## I. DO NÚMERO DE GRÃOS DE AREIA

Se Arquimedes tentou responder em seu *Arenário* qual é o número de grãos de areia no mundo, sabemos que o infinito não se manifestou na história suscitando simplesmente afirmações ou negações de sua existência: deve-se questionar as formas de sua manifestação.

O infinito pode aparecer, por exemplo, na subdivisão sucessiva. Em “O livro de areia”, J. L. Borges imaginou um livro de característica semelhante: aquele no qual entre duas páginas sempre poderia ser encontrada uma outra – possuindo a propriedade que os matemáticos chamam de “densidade”: “O número de páginas deste livro é infinito. Nenhuma é a primeira, nenhuma, a última”.

De maneira menos hiperbólica, algo assim se passa no momento em relação ao estudo de Leibniz e à edição de suas obras completas, o que torna delicadas afirmações definitivas com respeito aos seus trabalhos sobre a perspectiva.

A edição das obras de Leibniz dita da “*Akademie*” foi iniciada em 1923, com o título oficial de *Sämtliche Schriften und Briefe*. Tais escritos e cartas reunidos são editados em sete séries temáticas, e ainda não há uma data declarada para a finalização para tal edição, a qual supera as edições do século XIX com um novo nível de rigor filológico. Ela apresentará

a edição completa dos manuscritos de Leibniz, estimados entre 150.000 e 200.000 páginas, e escritos principalmente em latim (40%), francês (35%) e alemão (a maior parte do restante)<sup>1</sup>.

Talvez o fato de que as edições da obra deste autor pareçam demorar um tempo infinitamente divisível para serem publicadas em sua integralidade seja menos um capricho do acaso do que uma marca de similaridade entre suas obras matemáticas e filosóficas e certos critérios filológicos. Quero dizer que quanto à fidelidade ao texto em história da matemática ou em história da filosofia, a situação, como nas ciências, não se resume a completar uma coleção de dados, pois os critérios de avaliação destes mudam.

Quase se poder dizer que uma edição completa das obras de um pensador como Leibniz segue a mesma dinâmica que o telhado de certos templos circulares do Zen: quando acaba-se de dar a volta colocando suas telhas, já é o momento de recomeçar (um templo de pedra não tendo sentido, pois o que vale neste caso é o ato de cuidar do templo). Algo semelhante valeria para Pascal: aos fragmentos que este nos deixou, seguem-se edições “completas” de suas obras que terminam por ser provisórias.

A filologia e um novo rigor de edições nos permite estudos mais aprofundados; mas eles não devem nos inserir também num tipo de infinito que torna difícil que Aquiles, o leitor, ultrapasse a tartaruga que é o texto.

1 <http://www.gwlb.de/Leibniz/Leibnizarchiv/english/introduction/>. Acesso em 4/4/2016.

## 2. UMA GEOMETRIA NÃO QUANTITATIVA? *GEOMETRIA SITUS* E PERSPECTIVA

Passemos aos textos, e com eles ao que importa: às questões. Num manuscrito inédito datado de 1682, Leibniz escreve:

A geometria trata da grandeza e da figura das coisas. Assim, ela é subordinada a duas ciências, uma da comparação da grandeza em gênero, ou seja, da igualdade e da razão; outra, da forma das coisas em gênero, ou seja, da semelhança ou dessemelhança das coisas. A primeira ciência é muito cultivada quanto à grandeza e à igualdade; não é o mesmo para a posterior, das formas e da semelhança. O uso desta entretanto é uma marca distintiva, a qual espécie agora mostraremos ser fácil e não estranha: [...] (LH XXXV, I, 12, Bl. 21r; publicado em DE RISI 2007, p. 623)<sup>2</sup>.

É possível, contra a etimologia da *geo-metria*, falar de uma geometria sem medidas, quer dizer, não quantitativa? Tratar-se-ia, como diz tal passagem, de considerar a forma e a semelhança das figuras, sem por isso considerar necessariamente sua grandeza e a igualdade entre elas.

Desconhecemos o contexto de tal fragmento, ainda não publicado. Mas sabemos que em 1682 Leibniz já desenvolvera uma parte daquilo que foi um de seus maiores projetos: uma *análise* das noções fundamentais da geometria, associada à formulação de uma linguagem na qual elas poderiam ser devidamente expressas. Trata-se da *analysis situs* ou *geometria situs* e da “característica geométrica”.

2 “*Geometria tractat de rerum magnitudine et figura. Itaque duabus scientiis subordinata est, uni de magnitudine in genere et magnitudinum comparatione sive aequalitate et ratione; alteri de rerum formis in genere sive de rerum similitudine et dissimilitudine. Prior scientia de magnitudine et aequalitate egregie culta est; posterior de formis et simili non aequè. Cuius tamen usus est insignis, quem nunc facili nec ineleganti speciminie ostendemus: [...]*”.

Leibniz chegou a um estudo matemático de propriedades não quantitativas de figuras – em especial, desenvolvendo uma ciência das relações, o que é evocado em especial pela noção de *situs*. Podemos traduzir tal termo por “situação” ou “posição”; o fundamental é levarmos em conta que se trata de uma *relação*: o *situs* de um ponto é a sua posição relativa a outros elementos geométricos.

Tal projeto leibniziano apresenta algumas semelhanças com o tratamento perspectivo e projetivo das figuras geométricas que se desenvolvera anteriormente a Leibniz, em especial com Girard Desargues (1591–1661) e Blaise Pascal (1623–1662). Também nestes trabalhos o estudo da invariância de certas propriedades das figuras sob transformações abria espaço para uma geometria não quantitativa.

Apresentam-se assim duas ordens de questões, que foram abordadas por estudos recentes. Em primeiro lugar, qual foi a importância para Leibniz dos trabalhos de Desargues e Pascal? Além disso, deve-se considerar os trabalhos sobre a perspectiva desenvolvidos pelo próprio Leibniz, o que é dificultado por eles ainda não terem sido publicados. Os trabalhos recentes de V. DEBUICHE (2013, 2013b, no prelo), J. ECHEVERRÍA (1983, 1986, 1994) e V. DE RISI (2007) mostraram aspectos importantes desta relação, e é deles que devemos partir para considerá-la.

Quanto à relação entre *Analysis situs* e perspectiva, cabe considerar que ela não é sempre a mesma ao longo da vida de Leibniz. A principal questão é se uma das duas é mais geral que a outra, e se alguma delas poderia ser associada a uma “matemática universal”.

Para v. DEBUICHE<sup>3</sup>, entre 1670 e 1690 Leibniz muda de ideia: se no início deste período ele concebe a possibilidade de uma geometria das situações que seria uma generalização da perspectiva, mais tarde ele dirá que a perspectiva é mais geral do que a geometria das situações.

Nas notas de Leibniz ao *Tratado das Cônicas* de Pascal o tratamento unificado das cônicas o impressiona, mas ele parece considerar que ele não é o mais geral possível:

Em Geometria, todo método de descoberta por meio da situação, e portanto sem cálculo, consiste em abarcar simultaneamente várias [coisas] de mesma situação; o que se faz, tanto por meio de uma figura que inclui vários delas, onde aparece o uso dos sólidos, tanto pelo uso do movimento, ou seja, da mutação. Além disso, entre os movimentos e as mutações, parece que podemos nos aplicar de maneira muito útil à mutação de aparência, ou seja, à transformação ótica das figuras; é preciso ver se por este meio poderíamos ultrapassar o cone e nos elevar também a [considerações] mais elevadas (*in* COSTABEL 1962, p. 258, cf. a tradução para o francês na p. 265)<sup>4</sup>.

Nessa passagem, Leibniz apresenta as “mutações de aparência”, das quais se ocupa a perspectiva, como um dos tipos de movimentos e

3 “When geometry meets metaphysics: Leibniz, from the 1670s to the 1690s” (no prelo).

4 “Omnis in Geometricis ope situs inveniendi ratio adeoque sine calculo in eo consistet, ut plura simul eodem situ complectamur, quod fit tum ope figurae cujusdam plures includentis, ubi usus solidorum patet, tum ope motus sive mutationis. Porro ex motibus et mutationibus utilissime videtur adhiberi mutatio apparentiae, seu optica figurarum transformatio, nam et videndum an ejus ope possimus ultra Conum ad altiora quoque assurgere”



mutações, também chamando-as de “transformação ótica das figuras”. A geometria da situação é portanto mais ampla, pois compreende não só as mutações de aparência, mas todos os tipos de movimento e de mutação, além do uso dos sólidos, o qual entraria em outra categoria.

Quando Leibniz fala aqui de simultaneidade (*simul*), parece que tal palavra não pode ser interpretada no sentido temporal imediato – se fosse este o caso, como entender que haja simultaneidade em um movimento, o qual transcorre em uma sucessão? O fundamental para esta passagem é que coisas de mesma situação sejam consideradas conjuntamente – seja num sólido, seja enquanto partes de um movimento ou de uma mutação. Tais notas deixam portanto entrever que *Geometria situs*, ainda que não diretamente nomeada por Leibniz, seria portanto mais geral do que a perspectiva.

Mais tarde em sua vida, porém, Leibniz indicará o contrário: que a perspectiva pode ser considerada mais geral do que a *Geometria situs*. De fato, no manuscrito *Scientia Perspectiva*, ele escreve: “Esta ideia de perspectiva é a mais vasta, e compreende a totalidade da *Geometria situs*, a qual certamente se abstém do cálculo da grandeza (exceto das retas) e do movimento” (LH 35, XI, 1, Bl. 1r, intitulado *Scientia Perspectiva*; *Apud* ECHEVERRÍA 1983, p. 199)<sup>5</sup>.

A interpretação de J. ECHEVERRÍA (1983) é que a perspectiva de Desargues e de Pascal teria inspirado a *Analysis situs* leibniziana, talvez como uma dentre várias fontes de inspiração para esta. Mas quando Leibniz fala da perspectiva como compreendendo a própria *Analysis*

5 “Haec idea perspectivae vastissima est, et totam comprehendit Geometriam situs, quae scilicet à magnitudinis (praeterquam rectorum) et motus calculo abstinet”.

*situs*, devemos nos virar para a perspectiva que foi concebida pelo próprio Leibniz: uma perspectiva que admite casos anteriormente inéditos e que é mais importante no que se refere à generalização.

Há portanto dois momentos bem distintos na vida de Leibniz no que se refere à sua concepção da *Analysis situs*, da perspectiva e da relação entre ambas: se no primeiro projeto de *Analysis situs*, durante a sua estadia em Paris (1672-1676), Leibniz toma contato (direta ou indiretamente) com os trabalhos de Desargues e Pascal e concebe uma *Analysis situs* à qual a perspectiva seria subordinada, num período mais tardio Leibniz verá a possibilidade de uma perspectiva que abarca a *Analysis situs* – tratando-se neste caso de uma perspectiva enriquecida pelo próprio Leibniz.

### 3. PERSPECTIVA, SEÇÕES CÔNICAS E A POSSIBILIDADE DE “ULTRAPASSAR O CONE”

Se Deus existe e ele realmente criou a Terra, então, como é de nosso conhecimento absoluto, ele a criou com base na geometria euclidiana, e criou a inteligência humana apenas com o conceito das três dimensões do espaço. Por outro lado, houve e há até hoje geômetras e filósofos, inclusive dos mais notáveis, que duvidam de que todo o universo ou, em termos mais amplos, todo o ser tenha sido criado unicamente com base na geometria euclidiana; eles se permitem inclusive a fantasia de que duas paralelas que, segundo Euclides, jamais poderão encontrar-se na terra, talvez venham a encontrar-se em algum lugar do infinito. Eu, meu caro, resolvi que se nem isso consigo compreender, então quem sou eu para entender o que toca a Deus?

Ivan Karamázov (Dostoiévski, *Os irmãos Karamázov*)

Em que consistem os trabalhos de Desargues e Pascal em geometria aos quais nos referimos?<sup>6</sup> Tais trabalhos consistem no germe da teoria que, na virada do século XVIII para o XIX, foi caracterizada como uma “geometria projetiva”. Esta denominação não aparece para tais autores do século XVII, mas podemos usá-la enquanto estes trabalhos contêm alguns princípios que integrarão no futuro tal teoria, ao lado da noção de perspectiva<sup>7</sup>.

Tais trabalhos geométricos têm, ao menos em parte, origem na técnica da perspectiva linear desenvolvida na Itália do século XV. Se F. Brunelleschi (1377-1446) ficou célebre por representar o batistério do duomo de Florença por meio dos princípios da perspectiva linear, foi L. B. Alberti (1404 - 1472) que redigiu as regras de tal método no seu tratado *Da pintura*. Um certo tipo de matematização do espaço estava em ação, relacionada à concepção renascentista do homem e do mundo (cf. PANOFSKY 1993 [1925] e FLORIÊNSKI 2012 [1919]). Cabe destacar aqui um aspecto de tal forma de representação: nela as retas paralelas são representadas como se encontrando em um ponto que, aparente na tela, estaria a uma distância infinita na cena representada – aquele que seria mais tarde chamado o “ponto de fuga”.

A geometria de Desargues será a primeira a postular a possibilidade de que quaisquer duas retas num plano se encontram. Ou elas são concorrentes com uma intersecção a uma distância finita, ou então são paralelas, e neste caso seu ponto de encontro está a uma

6 Discuto a geometria projetiva de Pascal em CORTESE (2015).

7 Discutir as razões pelas quais tal abordagem geométrica passou um século e meio “adormecida” é um tema fundamental, mas que não caberia tratar aqui.

distância infinita (em ambos os casos, Desargues diz que as retas são de mesma “*ordonnance*”).

Um engenheiro natural de Lyon, Desargues ocupou-se de problemas oriundos da prática, como técnicas para corte de pedras e a representação em perspectiva. A partir dos anos 1630 ele frequentou o círculo do Pe. Mersenne em Paris, o grande ponto de encontro entre os homens interessados por ciência na França da época, e onde Blaise Pascal tomou contato com ele. Em 1639, Desargues publicou o *Esboço de projeto de um ensaio sobre os eventos de encontros de um cone com um plano*<sup>8</sup>, texto que apresentava certos princípios projetivos e admitia os pontos a distância infinita. Numa obra de leitura difícil, permeada de metáforas biológicas, Desargues partia de tal abordagem geométrica para considerar as “seções cônicas”: as curvas obtidas por cortes de um cone, cuja referência clássica eram as Cônicas de Apolônio de Perga (c. III a. C.).

A novidade da abordagem de Desargues é que, ao admitir elementos a distância infinita, pode-se conceber as cônicas umas como projeções das outras. Assim, um teorema válido para uma delas será também válido para as outras.

Pascal assimilou bem a abordagem de Desargues. Já aos 16 anos ele escrevera um pequeno porém importante *Ensaio sobre as cônicas* que o tornou célebre, e mais tarde um *Tratado das cônicas*. Este último foi perdido, nos restando apenas uma cópia feita por Leibniz de uma de suas partes: a *Geração das seções cônicas* (*Generatio conisectionum* – in: PASCAL 1970-1992, vol. II, pp. 1108-1119).

8 *Brouillon project d'une Atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan.*

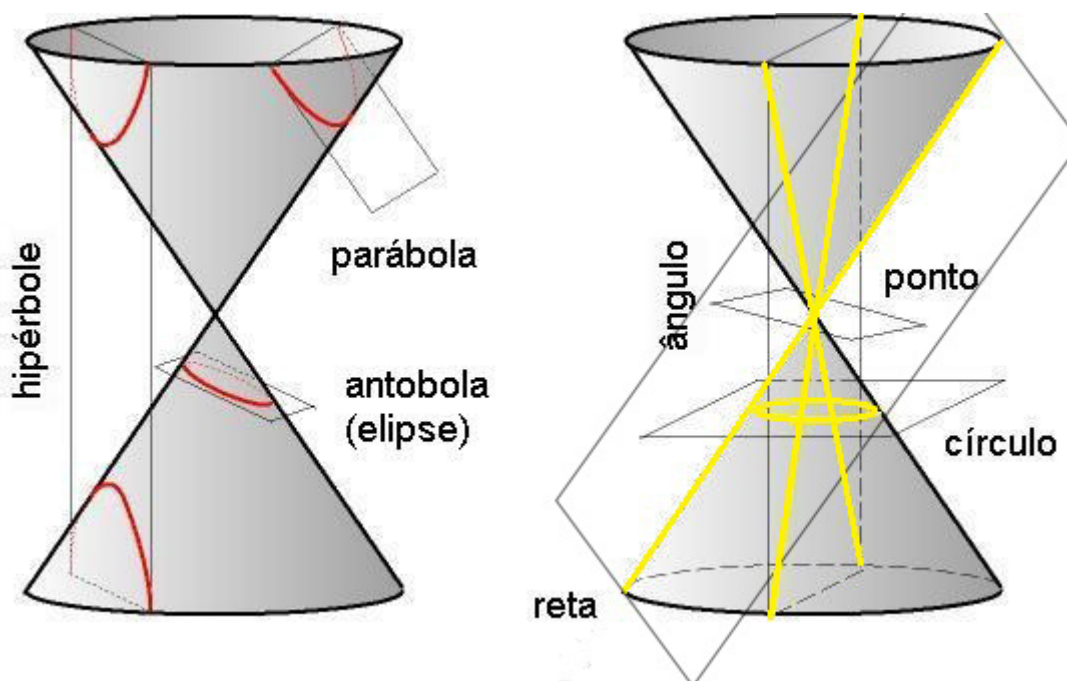
O princípio de tal abordagem consiste em considerar um duplo cone infinito, a partir do qual as curvas cônicas podem ser encontradas por meio de cortes. O método perspectivo/projetivo consiste então em considerar o “olho” no vértice deste cone, cada cônica podendo ser vista como uma projeção de outra (e, em particular, do círculo). O estudo da invariância de certas propriedades das figuras sob a projeção veio a consistir na geometria projetiva.

Pascal indica na *Geração das seções cônicas* como encontrar tais curvas a partir de um cone. Se tomamos um círculo, um ponto fora dele e uma reta infinita nos dois sentidos que passa pelo ponto e por um ponto da circunferência do círculo, e fazemos tal reta girar percorrendo todos os pontos da circunferência, enquanto o primeiro ponto permanece imóvel (o vértice, “*vertex*”), o espaço interior à superfície descrita pela reta será um cone. A reta que gira em torno da circunferência do círculo é chamada de “vertical” (“*verticalis*”) por Pascal, porque unida ao vértice (trata-se da reta hoje chamada “geratriz”).

Diferentes cortes do cone por planos geram as curvas que chamamos “cônicas”. Isso era conhecido pelos geômetras antigos ao menos desde as *Cônicas* de Apolônio de Perga (c. III d. C.). Mas a importância do tratamento projetivo está no tratamento unificado que este permite dar às cônicas.

As seções cônicas consideradas por Pascal são a elipse, a parábola, a hipérbole e casos específicos hoje ditos “degenerados”: o ponto, a reta e o ângulo retilíneo. Se cortarmos o cone com um plano cujas retas são paralelas a uma das geratrizes, encontramos uma parábola. Se o corte é feito por um plano cujas retas são paralelas a duas geratrizes, o que encontramos é uma hipérbole. Finalmente, se as retas do plano do corte

não são paralelas a nenhuma das geratrizes, encontramos uma elipse (lembramos que



o círculo é um caso particular da elipse).

*Figura 1. As seis seções cônicas das quais fala Pascal (o círculo é um caso particular da elipse)<sup>9</sup>*

9 Imagem de autoria de Christophe Dang Ngoc Chan, modificada. Copyright: Creative Commons GFDL license. Imagem original disponível em [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coniques\\_cone.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coniques_cone.png) (acesso em 11/4/2016).

A abordagem projetiva de Pascal consiste em tratar todas as cônicas como projeções do círculo. Uma comparação visual pode ajudar a visualizar tal tratamento: pensemos num abajur de cúpula circular, cuja lâmpada seria o vértice do cone. Caso esta seja disposta paralelamente a uma parede, um círculo será projetado nesta; mas se inclinamos a cúpula progressivamente, veremos diferentes elipses projetadas, até o ponto em que a parede seria paralela a uma das “verticais” do cone – neste caso, a imagem projetada seria uma parábola.

Para que tal correspondência possa ser admitida, Pascal postula que a parábola é composta por pontos a distância finita e por um ponto a uma distância infinita. No caso da hipérbole, semelhantemente, ela deve ser considerada como tendo dois pontos a distância infinita.

Mas que haja uma tal correspondência entre o finito e o infinito não é algo simples. De fato, numa passagem da *Generatio conisectionum* Pascal escreve: “Disso resulta que a parábola estende-se ao infinito e gera um espaço infinito, embora ela seja a imagem da circunferência do círculo, que é finito e abarca um espaço finito” (PASCAL 1970-1992, vol. II, p. 1114)<sup>10</sup>.

A importância de tal passagem está na generalização que é possível graças à abordagem projetiva e à admissão de pontos à distância infinita: é possível assim encontrar uma correspondência entre uma área finita e outra infinita. A parábola é uma curva “aberta”, mas desde que consideramos que ela possui um ponto a distância infinita, ela é uma curva que se fecha no infinito.

<sup>10</sup> “*Inde fit ut parabola, in infinitum extensa, infinitum spatium suscipiat, quamvis sit apparentia peripheriae circuli quae finita est et spatium finitum complectatur*”.

Além da cópia do texto de Pascal, Leibniz tomou notas sobre o *Tratado das Cônicas* escrito por este. Leibniz comenta que Pascal chama a elipse de “*antobola*”, pois ela é uma curva que se volta sobre ela mesma<sup>11</sup>. Já a parábola deve ser “concebida como” uma elipse infinita, voltando-se sobre si mesma a partir do infinito<sup>12</sup>.

Quanto à hipérbole, Leibniz considera que ela é constituída por duas curvas que voltam-se sobre elas mesmas. Ora, a consideração da hipérbole no cone é interessante justamente porque ela possibilita que se veja a razão de os dois ramos serem considerados como partes de uma única curva. Leibniz estaria aqui deixando de perceber a unificação das cônicas a partir do método de Desargues e Pascal em sua totalidade? Ou quando ele fala em duas “linhas curvas” ele usa a palavra “curva” num sentido mais fraco? A interpretação de COSTABEL (1962, p. 262, nota) é que Leibniz não percebe a generalidade da concepção pascaliana neste ponto, considerando-a como duas curvas. Por outro lado, Leibniz considera o caso degenerado no qual a secção do cone passa por duas “verticais”, não possuindo simplesmente retas que são paralelas a elas – neste caso, que Pascal chamara de “ângulo retilíneo”, Leibniz identifica ainda uma hipérbole.

De toda maneira, importa notar que em sua leitura Leibniz considera, assim como Pascal, a posição intermediária da parábola, entre a elipse e a hipérbole. Se o plano da elipse não é paralelo a nenhuma das

11 Tal palavra é formada a partir do grego *bállô* (“lançar, jogar”), assim como “parábola” e “hipérbole”.

12 “*Ellipsin antobolam vocat quia in se recurrit; parabolam concipit velut ellipsin infinite ab hinc in se recurrentem. Hyperbola re vera non una linea curva in se rediens, sed duae*” (Leibniz, in: PASCAL 1970-1992, vol. II, p. 1123).



“verticais”, o plano da parábola é paralelo a uma “vertical”, e o plano da hipérbole é paralelo a duas “verticais”.

É interessante notar que tal classificação das cônicas poderia talvez influenciar a concepção de uma transformação entre as curvas, ou mesmo noção leibniziana do contínuo. Não é possível aprofundar a questão aqui. Mas notemos que já em 1604 Kepler considerara cinco espécies de seções cônicas, e as ordenara numa série segundo a sua participação ao reto e ao curvo: reta, hipérbole, parábola, elipse e círculo<sup>13</sup>.

Vemos, portanto, que Leibniz foi um leitor ativo dos escritos de Pascal sobre as cônicas, apreendendo seus princípios essenciais e fazendo uma interpretação própria de alguns de seus aspectos.<sup>14</sup>

Mas e quanto aos textos do próprio Leibniz dedicados ao estudo da perspectiva? ECHEVERRÍA (1983) considerou dois deles datados do período de 1678-1685<sup>15</sup> e um que seria de 1695 ou posterior, intitulado *Scientia Perspectiva* (LH, XXXV, XI, Nr. 1, Bl. 1-2s). Dado que nenhum desses textos foi publicado, a avaliação que podemos fazer deles é evidentemente parcial<sup>16</sup>.

13 *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur* (...), Frankfurt, p. 92-93.

14 Quanto a Desargues, é difícil saber se Leibniz teria lido o *Brouillon project* diretamente ou apenas através de obras de seguidores de Desargues. O que temos certeza é que Leibniz leu a *Maniere Universelle de Monsieur Desargues* por volta de 1678 (cf. DEBUICHE 2013a, p. 376).

15 *Origo Regularum Artis Perspectiva quales sine libro ac Magistro inveni* (LH, XXXV, XI, Nr. 17, Bl. 19-20), e *Fundamentum Perspectivae meo marte investigatum* (LH, XXXV, XI, Nr. 17, Bl. 21).

16 Este é o início do trecho de *Scientia Perspectiva* citado por (ECHEVERRÍA 1983, pp. 198-199): “*Scientia Perspectiva est ars objecti apparentiam in Tabula exhibendi, id est*

Encontramos no manuscrito *Scientia Perspectiva* indícios de que Leibniz desenvolveu um método de perspectiva mais geral do que aquele de Desargues e de Pascal. Leibniz considera, por exemplo, não apenas a projeção sobre um plano, mas também sobre tábuas que sejam “côncavas”, “convexas” ou mesmo “mixtas”. Leibniz concebe também a possibilidade de uma perspectiva que considere tanto figuras monocromáticas quanto policromáticas. Além disso, a consideração de raios luminosos que não são todos paralelos, com reflexões e refrações, mostra que a perspectiva de Leibniz é extremamente inovadora em relação àquelas já existentes.

Quando Leibniz considera os elementos da perspectiva (o olho, o objeto e a tábua<sup>17</sup>), ele abre a possibilidade de que eles existam em configurações de distâncias infinitas ou infinitamente pequenas. A tábua pode estar a uma distância infinita do olho ou do objeto projetado.

Na verdade, já em suas notas ao *Tratado das Cônicas* de Pascal, Leibniz considerara que o círculo a partir do qual o cone é engendrado estava a uma distância infinita<sup>18</sup>. Isto já representava uma mudança em relação a Pascal, pois como vimos este considerara uma tábua a uma

*data aliqua Tabula (sive plana, sive superficie concava aut convexa, aut mixta) et objecto (sive id sit punctum, sive linea, superficies, solidum, cuius natura data est) datoque eorum situ inter se, et cum oculo (etiamsi distantiae quaedam ponantur infinitae aut infinitae parva; infinitae, ut si oculus à tabela vel objecto vel [haec] inter se infinitè distare intelligantur; infinitè parvae, si oculus incidat in Tabulam vel objectum quo casu neutrum debet esse figura plana, vel objectum in tabulam, quo casu saltem non debet esse planae parallelae”.*

17 Traduzo *tabella* por “tábua”; devemos ter em conta que tal superfície é como um quadro sobre o qual se projeta a imagem do objeto.

18 “*BDC circulus centro E infinite distans, circa quern movetur recta AB faciens conicam superfliciem*” (in COSTABEL 1962, p. 258).

distância finita do olho, o cone sendo infinito devido não a esta distância, mas à revolução de *retas infinitas* que passam tanto pelo vértice que é o olho quanto pelo círculo.

Fato importante é que Leibniz enuncia neste texto o princípio que é utilizado por Desargues: “as paralelas podem ser entendidas como convergindo no infinito neste intervalo” (LH, XXXV, XI, Nr. 1, Bl. 2v)<sup>19</sup>. De fato, como vimos, a admissão de pontos a distância infinita por Desargues tornava possível considerar as retas paralelas como concorrentes, princípio fundamental para a generalização do tratamento das cônicas. Leibniz dá também atenção ao fato que uma distância infinitamente pequena pode existir, se o próprio olho “está na” (*incidat in*) tábua ou no objeto. É interessante que Leibniz fale aqui de uma distância infinitamente pequena, e não de uma distância nula; trata-se do caso degenerado no qual não haverá diferença entre o tamanho do objeto e a imagem projetada, mas Leibniz não diz que não há distância, pois isso invalidaria o modelo da perspectiva. Preservando a continuidade do modelo, Leibniz prefere aqui falar de uma distância infinitamente pequena do que de uma distância nula.

Para ECHEVERRÍA (1983, p. 200), a novidade que é considerar a distância infinitamente pequena no esquema perspectivo indica que Leibniz se vale do cálculo diferencial na perspectiva, e que ele não se preocupa com a configuração real do aparelho visual humano, mas do “olho” do geômetra divino, que seria sempre representado por um ponto na geometria humana. Quanto a isso, cabe considerar o que o próprio Leibniz escreveu sobre a visão divina, a visão das Mônadas e a perspectiva.

19 “Hinc cum parallelae intelligi possint convergentes infinito ab hinc intervallo”.

#### 4. ENTRE A CENOGRAFIA E A ICNOGRAFIA: ALGUMAS QUESTÕES FILOSÓFICAS

No texto *Quid sit idea*, datado provavelmente de 1677 segundo a edição da *Akademie*, Leibniz declara que a representação de uma cônica por outra é uma questão de *expressão*. Pode-se dizer assim que uma elipse representa opticamente um círculo. Mas tal representação não se dá pela similaridade entre aquilo que é exprimido e aquilo que exprime: “Disso aparece não ser necessário que aquilo que exprime seja semelhante à coisa expressa, desde que seja preservada uma certa analogia das relações” (LEIBNIZ, 1923, A VI 4, 1370).<sup>20</sup>

A representação ótica com origem na perspectiva preserva, portanto, “uma certa analogia” entre as duas curvas. Vemos a importância do paradigma da perspectiva para Leibniz: a possibilidade de passar de uma cônica a outra perspectivamente lhe dá um dos modelos para a relação fundamental de expressão.

Como tipos de expressão, Leibniz não admite apenas uma representação projetiva de uma cônica pela outra, mas também que a “equação Algébrica exprime o círculo ou uma outra figura” (LEIBNIZ, 1923, A VI 4, 1370).<sup>21</sup> Ora, sabemos justamente que Desargues e Pascal não se valiam da álgebra em sua geometria. Se Leibniz faz referência a ela, é porque ele pode integrar dois tipos de generalização do estudo das cônicas: tanto a abordagem projetiva cultivada por Desargues e Pascal quanto a abordagem algébrica da qual um importante praticante era Descartes<sup>22</sup>.

20 “Unde patet non esse necessarium ut id quod exprimit simile sit rei expressae, modo habitudinum quaedam analogia servetur”.

21 “*aequatio Algebraica exprimit circulum aliamve figuram*”.

22 Tal diferença de abordagens às cônicas pode ser concebida como uma questão

Tal tipo de integração já aparecera no texto *Do método da universalidade*, de 1674, no qual Leibniz apresentara uma equação geral a todas as cônicas. Isto era possível também graças a uma ambiguidade de alguns dos sinais utilizados nas equações, ambiguidade esta que pode ser qualificada de “produtiva”<sup>23</sup>.

Guardemos o fato de que para Leibniz a relação perspectiva entre as cônicas é questão de expressão entre coisas distintas que guardam entre elas “uma certa analogia”, o que é relacionado à possibilidade de generalização do estudo geométrico dessas curvas.

Um outro tipo de uso filosófico da perspectiva por Leibniz aparece com o modelo da cidade que é observada de vários pontos de vista, por exemplo no *Discurso de metafísica* (1686):

[...] toda substância é como um mundo inteiro e como um espelho de Deus ou de todo o universo, que ela exprime cada uma à sua maneira, aproximadamente como uma mesma cidade é diversamente representada segundo as diferentes situações daquele que a olha. Assim o universo é de certa maneira multiplicado tantas vezes quantas substâncias há, e a glória de Deus é também assim redobrada por tantas representações totalmente diferentes de sua obra (LEIBNIZ, 1923, A VI 4, p. 1542).

de *estilo*, como foi feito por (GRANGER, 1974 [1968]). Se Descartes admitia apenas objetos “claros e distintos” nas ciências, Desargues admitia elementos que poderiam ser considerados paradoxais, como aqueles no quais há pontos a distâncias infinitas. No entanto, cabe considerar que em discussões mais recentes sobre a noção de estilo na história da matemática, concebe-se que posições “opostas” em um momento sobre um problema matemático poderiam em princípio comungar de um mesmo estilo matemático – cf. DHOMBRES (1993) e RABOUIN (no prelo).

23 A este respeito, cf. GROSHOLZ (2007, pp. 207-213).

Também neste caso Leibniz associa o modelo da perspectiva a uma questão de expressão e de representação; mas a comparação serve neste caso não tanto para mostrar a potência da generalização da representação entre coisas distintas, mas o caráter *aproximado* deste modo de expressão. A perspectiva não é aqui um modelo de estrutura que permite a generalidade, mas um modo de indicar a *parcialidade* de certas representações.

Entretanto, não encontramos na obra de Leibniz esta simples dicotomia entre dois usos do modelo da perspectiva. Num célebre anexo a uma de 1712 a Des Bosses, Leibniz escreve sobre o modo de realidade das coisas em relação a Deus. Para distinguir a o modo de apresentação das coisas enquanto fenômenos a nós e a Deus, Leibniz recorre a uma analogia com dois modos de representação:

E a diferença da aparição dos corpos para nós e para Deus é de certo modo como aquela entre a cenografia e a icnografia. Pois as cenografias são diversas em função da situação do espectador, enquanto a icnografia ou representação geométrica é única. De fato, Deus vê as coisas exatamente como elas são, segundo a verdade Geométrica, embora da mesma maneira também saiba de que modo cada coisa aparece a cada outra, e assim ele contém eminentemente em si todas as outras aparências (LEIBNIZ, 1875-1890, GP II, 438).<sup>24</sup>

24 “*Et inter corporum apparitionem erga nos et apparitionem Deum discrimen est quodammodo, quod inter scenographiam et ichnographiam. Sunt enim scenographiae diversae pro spectatoris situ, ichnographia seu geometrica repraesentatio unica est; nempe Deus exacte res videt quales sunt secundum Geometricam veritatem, quanquam idem etiam scit, quomodo quaeque res cuique alteri appareat, et ita omnes alias apparentias in se continet eminenter*” (LEIBNIZ, 1875-1890, GP II, p. 438).

Os termos desta passagem remetem a tipos de representação já existentes na Antiguidade, mas saber em que medida a pintura de Grécia e Roma já possuía regras de representação do espaço comparáveis àquelas da perspectiva linear renascentista é objeto de debate. Cabe apenas mencionar que a disciplina da “cenografia” é mencionada por Vitrúvio no *De architectura* (século I a. C.) como uma das três “*species dispositionis*”, ao lado da “icnografia” e da “ortografia”<sup>25</sup>. Se a cenografia seria próxima do que entendemos por perspectiva, possuindo uma projeção central, a icnografia é uma representação plana, e a ortografia uma “elevação”.

Voltando à carta à Des Bosses, depreendemos que Leibniz reconhece na cenografia um tipo de representação por assim dizer parcial, pois depende da situação (*situs*) daquele que vê: espectadores em diferentes posições formarão distintas imagens. Quanto à icnografia, ao contrário, por ser uma representação plana, como o que chamamos de “planta” arquitetônica hoje, ela é independente do ponto de vista, e neste sentido pode ser comparada à visão divina.

Mas o final do trecho citado mostra que o papel divino nesta comparação não se reduz à equiparação à icnografia: se por um lado a visão apreende a “verdade Geométrica” tal como a icnografia, por outro lado Deus tem também o conhecimento de como cada coisa aparece a uma outra. Leibniz escreve na sequência da carta que Deus não considera somente as Mônadas e suas modificações, mas também as relações (*relationes*) entre as Mônadas, dizendo que é nisto que consiste a realidade das relações e da verdade.

25 Cf. ANDERSEN 2007, pp. 728-730, que também ressalta a referência de Proclo à cenografia no seu comentário aos *Elementos* de Euclides (século V d. C.). Cf. também KONTIC (2014, pp. 95-103). Cabe ressaltar que tanto Vitruvius quanto Leibniz falam de “icnografia”, e não de “iconografia”.

Podemos, portanto, dizer que em 1712 Leibniz atribui à visão divina dois modos pelos quais ela é, por assim dizer, completa: ela se dá tanto pelo bom tipo de representação icnográfica, não padecendo da parcialidade da cenografia, quanto pela ciência divina do conjunto de parcialidades relacionadas a cada *situs*. Digamos que Deus possui assim a visão do *todo*, ao mesmo tempo em que a visão de *todos* os pontos de vista. Leibniz pensa numa superação da parcialidade do ponto de vista ao associar à visão divina tanto ao ponto de vista (parcial) quanto à ubiquidade<sup>26</sup>.

## 5. PONTOS DE VISTA

Que concluir de um livro aberto? Vimos como Leibniz avança no sentido da generalização de uma geometria independente de medidas. Isto se dá tanto em sua *analysis situs* quanto em seus trabalhos sobre a perspectiva. Leibniz reconheceu na abordagem perspectiva das cônicas de Desargues e de Pascal uma via para a generalização da geometria. Se a perspectiva foi submetida nos anos 1670 por Leibniz à *Geometria situs*, nos anos 1690 ela ganha uma generalidade ainda maior com os desenvolvimentos expostos no manuscrito *Scientia Perspectiva*.

26 Uma passagem neste sentido aparece nos *Pensamentos* de Pascal: “Acreditais ser impossível que Deus seja infinito, sem partes? – Sim. Quero então mostrar-vos uma coisa infinita e indivisível. É um ponto a se mover por toda parte a uma velocidade infinita. Porque ele é um em todos os lugares e está todo inteiro em cada lugar” (Fragmento Sellier 680, Lafuma 420; tradução de PASCAL 2005, com alterações). Quer dizer que, assim como para a “esfera infinita cujo centro está em toda parte, a circunferência em parte alguma”, Pascal concebe a possibilidade de um ponto que tem uma situação distintiva ao mesmo tempo em que está em mais de um lugar.



Qual é a importância deste tipo de generalização para Leibniz? Vimos como a transformação entre as cônicas está relacionada à questão da representação, sendo um dos tipos de expressão. Além disso, a noção de transformação poderia estar relacionada à noção leibniziana mais geral de mutação e ao princípio de continuidade, o que resta a investigar em maior profundidade (cf. ECHEVERRÍA, 1986, p. 77-79).

Finalmente, o paradigma da perspectiva tem uma importância filosófica para Leibniz. Ele é utilizado tanto para mostrar a parcialidade de um ponto de vista quanto a possibilidade de uma visão total divina (com a icnografia ou com a totalidade dos pontos de vista).

Um modelo útil à geometria no tratamento das cônicas, a perspectiva é também para Leibniz uma estrutura interessante em si mesma, e saber a que perspectiva o ponto de vista das Mônadas e de Deus é comparável é da maior importância, pois determina aquilo que pode ser conhecido.

Quanto à relevância dos trabalhos de Leibniz em perspectiva para a história desta, uma análise precisa se fará necessária, desde que o último grão de areia da ampulheta caia para a edição dos manuscritos.

## LEIBNIZ AND THE PARADIGM OF PERSPECTIVE

**ABSTRACT:** In the seventeenth century, we see the emergence of a new geometric approach to the conic sections. Initially developed by Girard Desargues and Blaise Pascal, such geometry partially inherits the linear perspective representation method and advances towards nineteenth century projective geometry. Recent studies by J. Echeverría and V. Debuiche discussed the reception of such works by Leibniz, as well as their relationship with Leibniz's own works on perspective (still in large part unpublished) and his *Geometria situs*. This article covers some issues related to these areas, as well as the importance of the paradigm of perspective to Leibniz's philosophy.

**KEYWORDS:** Leibniz, Pascal, Desargues, perspective, projective geometry, infinity.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ANDERSEN, K. (2007) *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. New York: Springer.

BKOUCHE, R. (1991) "La naissance du projectif. De la perspective à la géométrie projective". In: Rashed, R. (Ed.), *Mathématiques et philosophie*: Paris: CNRS, pp. 239–285.

COSTABEL, P. (1962) "Traduction française de notes de Leibniz sur les "Coniques" de Pascal". *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 15 (3–4), pp. 253–268.

CORTESE, J. F. N. (2015) "Infinity between mathematics and apologetics: Pascal's notion of infinite distance". *Synthese*, 192 (8), pp. 2379–2393.

Publicação online em 2014.

DE RISI, V. (2007) *Geometry and Monadology: Leibniz's Analysis situs and Philosophy of Space*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

DEBUICHE, V. (2013a) "Perspective in Leibniz's Invention of *Characteristica Geometrica*: The Problem of Desargues' Influence". *Historia Mathematica* 40, pp. 359–385.

\_\_\_\_\_. (2013b) "L'expression leibnizienne et ses modèles mathématiques". *Journal of the History of Philosophy* 51 (3), 409–439.

\_\_\_\_\_. "L'invention d'une géométrie pure au 17<sup>e</sup> siècle: Leibniz, lecteur de Pascal". (no prelo).

\_\_\_\_\_. "When geometry meets metaphysics: Leibniz, from the 1670s to the 1690s". (no prelo).

DHOMBRES, J. (2003) "Shadows of a circle, or what is there to be seen? Some figurative discourses in the mathematical sciences during the seventeenth century". In: Massey, L. *The treatise on perspective: published and unpublished*. Washington: National Gallery of Art.

ECHEVERRÍA, J. (1983) "Recherches inconnues de Leibniz sur la géométrie perspective". In: *Leibniz et la Renaissance. Studia Leibnitiana Supplementa* 23, pp. 191–201.

\_\_\_\_\_. (1986) "Infini et continu dans les fragments géométriques de Leibniz". In: Lamarra, A. (ed.). *L'infinito in Leibniz : problemi e terminologia*. Roma: Ateneo.

\_\_\_\_\_. (1994) "Leibniz, interprète de Desargues". In: Dhombres, J. e Sakarovich, J. (Eds.). *Desargues en son temps*. Paris: Blanchard, pp. 283–293.

FLORIÊNSKI, P. (2012) [1919]. *A perspectiva inversa*. São Paulo: Editora 34.

GRANGER, G.-G. (1974) [1968]. *Filosofia do estilo*. São Paulo: Perspectiva.

GROSHOLZ, E. R. (2007). *Representation and productive ambiguity in mathematics and the sciences*. Oxford: Oxford University Press.

KONTIC, S. Z. (2014) *Ideia, Imagem e Representação: Leibniz crítico de Descartes e de Locke*. São Paulo. 146 p. Dissertação de mestrado em Filosofia. Universidade de São Paulo.

LEIBNIZ, G. W. (1875–1890) *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*. C. I. Gerhardt (Ed.). Berlin. Reimpressão: Olms, Hildesheim, 1965.

\_\_\_\_\_. (1903). *Opusculs et fragments inédits*. L. Couturat (Ed.). Reimpressão: Olms, Hildesheim, 1988.

\_\_\_\_\_. (1923 – ) *Sämtliche Schriften und Briefe*. Darmstadt, Leipzig, Berlin.

PASCAL, B. (1970 – 1992). *Oeuvres complètes*. Edição de J. Mesnard. Paris: Desclée de Brouwer. 4 volumes publicados de 7 previstos.

\_\_\_\_\_. (2000) *Pensées*. Ed. de P. Sellier. Notas de G. Ferreyrolles. Paris: Le livre de poche.

\_\_\_\_\_. (2005) *Pensamentos*. Tradução de Mario Laranjeira a partir da edição Lafuma. São Paulo: Martins Fontes.

PANOFKY, E. (1993) [1925] *A perspectiva como forma simbólica*. Lisboa: Edições 70.

RABOUIN, D. “On mathematical style”. In: Chemla, K. & Keller, E. F. (eds.). *Cultures without culturalism in the making of scientific knowledge*. No prelo.

TATON, R. (1951) *L'œuvre mathématique de G. Desargues*. Paris.

\_\_\_\_\_. (1962) “L'œuvre de Pascal en géométrie projective”. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 15 (3–4), pp. 197–252.

ZELLINI, P. (1980) *Breve storia dell'infinito*. Milão: Adelphi.

Recebido: 08/04/2016

Aprovado: 02/05/2016